

## Integral Definido \_ Método de Substituição

**AUTOR:** Iva Svobodová

**VÍDEO:** Altino Manuela Folgado dos Santos

**NÍVEL QCER:** C1

**ÁREA:** Matemática

**DURAÇÃO:** 60-90 minutos

**MATERIAL DIDÁTICO:**

1. Vídeo (duração: 00:07:29 min)  
<https://medial.phil.muni.cz/Play/26330#!> ou  
<https://www.youtube.com/watch?v=VEwggmuD6J0>
2. 8 Exercícios

**OBJETIVOS:**

O objetivo deste REA é apresentar vários tipos de atividades relacionadas com a análise matemática. Com base no vídeo “Integral definido. Método de substituição” gravado e disponibilizado pelo prof. dr. Altino Manuel Folgado dos Santos da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, pretende-se desenvolver a competência linguística dos alunos que têm um domínio avançado de língua, visando reforçar, sobretudo, a competência textual potencializando as capacidades de leitura e compreensão de um texto matemático mais complexo e de formulação de fórmulas matemáticas mais complexas.

A unidade é iniciada com uma atividade em que o aluno deve anotar as fórmulas matemáticas e preencher as lacunas de acordo com o texto por expressões da área da análise matemática que deve traduzir para a sua língua materna. Ao mesmo tempo, tenta formular a análise matemática e comparar, conseqüentemente, a sua formulação com as fórmulas gravadas no vídeo. O aluno é convidado para ver, também outros vídeos do prof. Altino Santos. A parte lexicológica que se segue visa enriquecer o vocabulário do aluno através da aprendizagem de termos matemáticos e analíticos. O aluno pode preencher o seu próprio glossário

**COMPETÊNCIA comunicativa textual**, fonética, lexical

**COMPETÊNCIA** geral

**CAPACIDADES:**

Definição de Integral.

Género gramatical.

Perceção de um texto matemático mais complexo.

Lógica textual e matemática.

Formulação das fórmulas matemáticas

Leitura das fórmulas matemáticas.

## ATIVIDADES

### I. Complete a descrição do termo “integral definido” com as expressões que se encontram na lista.

física, geométrica, trajetória, uma ferramenta, positiva, intervalo,

O integral definido é \_\_\_\_\_ matemática que permite determinar a variação de uma função com base na informação sobre a rapidez com que a função está a variar num determinado \_\_\_\_\_. É, portanto, uma espécie de contrapartida da derivada. A aplicação \_\_\_\_\_ mais comum é a determinação da \_\_\_\_\_ de um corpo a partir de uma velocidade conhecida. O integral definido de uma função \_\_\_\_\_ tem também uma interpretação \_\_\_\_\_ ilustrativa; é o conteúdo do conjunto sob o gráfico dessa função no intervalo considerado.

### II. Veja primeiro o vídeo do Professor Altino Santos e vá anotando informações essenciais.

#### ACESSO:

<https://medial.phil.muni.cz/Play/26330#!>

ou

<https://www.youtube.com/watch?v=VEwqgmuD6JO>

(duração: **00:07:29**).

### III. Agora complete o texto de acordo com o vídeo.

Olá! Espero que esteja tudo bem contigo. Neste vídeo vamos **(1)** \_\_\_\_\_ definido de zero até um.  $x$  ao quadrado vez a raiz quadrada de quatro menos  $x$  quadrado  $dx$ .

Então, vamos lá! De maneira a conseguirmos eliminar aqui esta **(2)** \_\_\_\_\_, vamos considerar a seguinte substituição. Fazemos  $x$  igual a dois seno de teta. OK?

Pelo que  $dx$  é igual,  $dx$  é igual a dois **(3)** \_\_\_\_\_ de teta  $d$  teta. Bom, temos que ....  $x$  varia de 0 a 1 ... qual será a variação de **(4)** \_\_\_\_\_?

Se  $x$  for 0, temos 2 seno teta igual a 0. Podemos pôr teta igual a 0 ou, teta maior ou igual do que 0. E agora se  $x$  for 1, quando  $x$  é 1, 2 **(5)** \_\_\_\_\_ teta é igual a 1 significa que seno teta é o meio, portanto teta é **(6)** \_\_\_\_\_ sobre seis. Consideramos este intervalo: teta de zero a  $\pi$  **(7)** \_\_\_\_\_ seis.

Ou então com esta substituição, o nosso integral definido fica integral de 0 a  $\pi$  sobre 6 na nova variável. 0  $\pi$  sobre 6, **(8)** \_\_\_\_\_ é 4 seno ao quadrado, de teta e agora temos aqui a raiz quadrada de 4 menos seno ao quadrado de teta, é raiz desta expressão. E agora temos o  $dx$  é igual a 2 cosseno de teta,  $d$  teta. OK – igual agora aqui em baixo,

temos o integral 0, a  $\pi$  sobre 6. Este quadro vamos puxá-lo aqui para trás. Assim, temos, então, seno ao quadrado de teta. Aqui temos raiz quadrada de 4 menos 4 seno ao quadrado colocando quatro **(9)** \_\_\_\_\_ , raiz de quatro é 2. E agora ficamos com 1 menos seno ao quadrado teta, que é igual ao cosseno ao quadrado teta. Com a raiz fica apenas cosseno teta. Está certo?

E agora vezes dois, cosseno teta. **(10)** \_\_\_\_\_ , igual a 4, integral de zero a  $\pi$  sobre 6, bom vamos escrever estes - todos estes - fatores da seguinte forma. Temos aqui dois, seno de teta, vezes cosseno de teta. E agora outra vez, vezes dois, o outro seno de teta e aqui cosseno teta de teta.

Porque é que escrevi assim desta maneira? Porque dois seno de teta cosseno de teta é o seno de dois teta. E aqui aparece outra vez seno de 2 teta. Então temos quatro integral zero a  $\pi$  sobre seis, do quadrado do seno ao quadrado de dois teta d teta. Seno ao quadrado de dois teta, d teta.

De maneira a conseguirmos continuar para o seno ...o seno aqui em cima, seno ao quadrado de alfa, **(11)** \_\_\_\_\_ 1 menos cosseno de 2 alfa sobre 2. Sobre 2. É uma fórmula que utilizamos muitas vezes para **(12)** \_\_\_\_\_ o seno ao quadrado. OK. Bom, então, com isto, temos 4 vezes, integral de 0 a  $\pi$  sobre 6, de seno ao quadrado dois teta igual a um menos cosseno de 2 vezes - 2 vezes - 2 teta sobre 2. Ou seja **(13)** \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ . Ou ainda, 4 sobre dois é dois, integral de 0 a  $\pi$  sobre 6, de um menos cosseno de 4 teta, d teta. Igual aqui em baixo – a duas vezes vamos já primitivar – primitiva de 1 de teta é igual a teta. – e a primitiva do cosseno de 4 teta é seno de 4 teta, sobre 4. Assim, aqui temos 0 e aqui  $\pi$  sobre 6. Bom, substituindo por temos 1, 2 antes por  $\pi$  sobre 6, teta  $\pi$  sobre seis, menos seno de 4  $\pi$  sobre seis, que é o seno de 2  $\pi$  sobre três, que é raiz de três sobre 6. E aqui, sobre 4. Quando de teta zero – portanto fica apenas isto. Igual a dois vezes  $\pi$  sobre 6, que é  $\pi$  sobre 3, **(14)** \_\_\_\_\_ e fica menos raiz de **(15)**.....E este é o valor do integral definido que nós propusemos calcular.

Bom, despeço-me então, fiquem bem e até o próximo vídeo. Chao.

**IV. Traduza as partes preenchidas para a sua língua materna**

	Expressão	Tradução para a língua materna
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		

12		
13		
14		
15		

V. E agora tente formular a análise e compare a sua formulação com a que se encontra no vídeo (00:00 - 04:06 min.).

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\pi/6} 4 \sin^2 \theta \sqrt{4-4\sin^2 \theta} 2 \cos \theta d\theta = \\
 & = 4 \int_0^{\pi/6} \sin^2 \theta 2 \cos \theta 2 \cos \theta d\theta = 4 \int_0^{\pi/6} 2 \sin \theta \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta
 \end{aligned}$$

$x = 2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$   
 $dx = 2 \cos \theta d\theta$

(vídeo 0:00 - 4:06)

**VI. Encontre uma diferença essencial na formulação do seguinte texto em Português Europeu e Brasileiro,**

<b>PORTUGUÊS EUROPEU</b>	<b>PORTUGUÊS BRASILEIRO</b>
É importante saber-se distinguir o integral definido do integral indefinido. Um integral definido é um número, enquanto um integral indefinido é uma função (ou uma família de funções). Como consideramos o integral como uma antiderivada, ou seja, o inverso da derivada, colocamos a constante.....	É importante saber-se distinguir a integral definida da integral indefinida. Uma integral definida é um número, enquanto uma integral indefinida é uma função (ou uma família de funções). Como consideramos a integral como uma antiderivada, ou seja, o inverso da derivada, colocamos a constante .....

**VII. Traduza o novo vocabulário para a sua língua materna e acrescente palavras que necessite.**

<b>Português</b>	<b>Tradução ou definição na língua materna</b>
calcular	
cancelar	
colocar em evidência	
cosseno (m.)	
DE (letra)	
de (preposição)	
fórmula (f.)	
igual a (=)	
Integral (m.)	
integral definido de zero até um	
menos (-)	
pi ( $\pi$ , $\Pi$ )	
primitivar	
puxá-lo	
puxar	
raiz (f.) quadrada	
seno (m.)	
sobre	
substituição (f.)	
teta ( $\theta$ , $\Theta$ )	
variação (f.) de teta	
vezes	
vezes (x)	
x /šiš/	
X ao quadrado	

**VIII.**

## VIII. Veja outros vídeos de Altino Santos sobre integrais:

### PRIMITIVAS E INTEGRAIS

<https://www.youtube.com/watch?v=p0ocjicMQaw&list=PL1L3WVoVxxrh5L9sGV5BvBOtVeG35sjFQ>

### CÁLCULO INTEGRAL

[https://www.youtube.com/watch?v=KJBDCeZZG\\_o](https://www.youtube.com/watch?v=KJBDCeZZG_o)

### PRIMITIVAS IMEDIATAS. EXEMPLOS BÁSICOS.

<https://www.youtube.com/watch?v=8nXagtj3R6I>

### Mengoli, Dirichlet. Critérios de comparação: 1º, 2º, integral.

<https://www.youtube.com/watch?v=zYKPymnB9w8>

ou outros vídeos aqui:

<https://www.youtube.com/@AltinoSantos>

Análise Matemática:

[https://www.youtube.com/playlist?list=PL1L3WVoVxxriDQNZ\\_Dq2VyPtmWFq1tuGAI](https://www.youtube.com/playlist?list=PL1L3WVoVxxriDQNZ_Dq2VyPtmWFq1tuGAI).

## SOLUÇÃO

I. O integral definido é **uma ferramenta** matemática que permite determinar a variação de uma função com base na informação sobre a rapidez com que a função está a variar num determinado **intervalo**. É, portanto, uma espécie de contrapartida da derivada. A aplicação **física** mais comum é a determinação da **trajetória** de um corpo a partir de uma velocidade conhecida. O integral definido de uma função **positiva** tem também uma interpretação **geométrica** ilustrativa; é o conteúdo do conjunto sob o gráfico dessa função no intervalo considerado.

### II. INDIVIDUAL

III. A. Olá! Espero que esteja tudo bem contigo. Neste vídeo vamos **calcular o integral** definido de zero até um.  $x$  ao quadrado vezes a raiz quadrada de quatro menos  $x$  quadrado  $dx$ . Então, vamos lá! De maneira a conseguirmos eliminar aqui esta **raiz quadrada**, vamos considerar a seguinte substituição. Fazemos  $x$  igual a dois seno de teta. OK? Pelo que  $dx$  é igual,  $dx$  é igual a dois **cosseno** de teta  $d$  teta. Bom, temos que  $x$  varia de zero a um, qual será a variação de **teta**? Se  $x$  for 0, temos 2 seno teta igual a zero. Podemos pôr teta igual a zero ou, teta maior ou igual do que zero. E agora se  $x$  for 1, quando  $x$  é um, dois **seno** teta é igual a 1 significa que seno teta é o meio, portanto teta é **pi** sobre seis. Consideramos este intervalo: teta de zero a pi sobre seis. Ou então com esta substituição, o nosso integral definido fica integral de zero a pi sobre seis na nova variável. Zero pi sobre seis,  **$x$  ao quadrado** é 4 seno ao quadrado de teta e agora temos aqui a raiz quadrada de 4 menos seno ao quadrado de teta, é raiz desta expressão. E agora temos o  $dx$  É IGUAL A 2 COSENO DE TETA,  $d$  teta. OK – igual agora aqui em baixo, temos o integral zero a pi sobre seis. Este quadro vamos puxá-lo aqui para trás. Assim, temos então seno ao quadrado de teta. Aqui temos raiz quadrada de 4 menos 4 seno ao quadrado colocando quatro **em evidência**, raiz de quatro é 2. E agora ficamos com 1 menos seno ao quadrado teta, que é igual ao cosseno ao quadrado teta. Com a raiz fica apenas cosseno teta. Está certo? E agora vezes dois cosseno teta. **D teta**, igual a 4, integral de zero a pi sobre 6, bom vamos escrever estes - todos estes - fatores da seguinte forma. Temos aqui dois, seno de teta, vezes cosseno de teta. E agora outra vez, vezes dois, o outro seno de teta e aqui cosseno teta de teta. Porque é que escrevi assim desta maneira? Porque dois seno de teta cosseno de teta é o seno de dois teta. E aqui aparece outra vez seno de 2 teta. Então temos quatro integral zero a pi sobre seis, do quadrado do seno ao quadrado de dois teta  $d$  teta. Seno ao quadrado de dois teta,  $d$  teta. De maneira a conseguirmos continuar para o seno ....o seno aqui em cima, seno ao quadrado de alfa, **é igual a 1** menos cosseno de dois alfa sobre dois. Sobre dois. É uma fórmula que utilizamos muitas vezes para **primitivar** o seno ao quadrado. OK. Bom, então, com isto, temos 4 vezes, integral de zero a pi sobre seis, de seno ao quadrado dois teta igual a um menos cosseno de dois vezes - dois vezes - dois teta sobre dois. Ou seja **1 menos cosseno de quatro teta, sobre dois d teta**. Ou ainda, 4 sobre dois é dois, integral de zero a pi sobre seis, de um menos cosseno de 4 teta,  $d$  teta. Igual aqui em baixo – a duas vezes vamos já primitivar – primitiva de 1 de teta é igual a teta. – e a primitiva do cosseno de 4 teta é seno de 4 teta, sobre quatro. Assim, aqui temos zero e aqui pi sobre seis. Bom, substituindo por temos um dois antes por pi sobre seis, teta pi sobre seis, menos seno de 4 pi sobre seis, que é o seno de 2 pi sobre três, que é raiz de três sobre dois. E aqui, sobre quatro. Quando de teta zero – portanto fica apenas isto. Igual a dois vezes pi sobre seis, que é pi sobre três, **este dois cancela com este dois** e fica menos raiz de **três sobre quatro**. E este é o valor do integral definido que nós propusemos calcular.

Bom, despeço-me então, fiquem bem e até o próximo vídeo. Chao.

### IV. . INDIVIDUAL

V. **SOLUÇÃO PROPOSTA** /poderá ser reformulada e modificada estilisticamente conforme os hábitos de fala/

$x = 2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$   
 $dx = 2 \cos \theta d\theta$   
 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\pi/6} 4 \sin^2 \theta \sqrt{4-4 \sin^2 \theta} 2 \cos \theta d\theta =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/6} \sin^2 \theta 2 \cos \theta 2 \cos \theta d\theta = 4 \int_0^{\pi/6} 2 \sin \theta \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/6} \sin^2(2\theta) d\theta = 4 \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} d\theta = 2 \int_0^{\pi/6} 1 - \cos(4\theta) d\theta =$$

$$= 2 \left[ \theta - \frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_0^{\pi/6} = 2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Vamos calcular o integral definido de zero até um. X ao quadrado vez a raiz quadrada de quatro menos x quadrado dx. Para conseguirmos a raiz quadrada, vamos considerar a seguinte substituição: fazemos x igual a dois seno de teta. dx é igual a dois cosseno de teta D teta. x varia de zero – qual será a variação de teta? Se x for 0, temos 2 seno teta igual a zero. Podemos pôr teta igual a zero ou, teta maior ou igual do que zero.

E agora se x for 1, quando x é um, dois seno teta é igual a 1 significa que seno teta é o meio, portanto teta é pi sobre seis. Consideramos este intervalo: teta de zero a pi sobre seis.

Com esta substituição, o nosso integral definido fica integral de zero a pi sobre seis na nova variável. Zero pi sobre seis, x ao quadrado é 4 seno ao quadrado, de teta e agora temos aqui a raiz quadrada de 4 menos seno ao quadrado de teta, é raiz desta expressão. E agora temos o d x É IGUAL A 2 COSENO DE TETA, d teta. OK – igual agora aqui em baixo, temos o integral zero a pi sobre seis. Este quadro vamos puxá-lo aqui para trás. Assim, temos então seno ao quadrado de teta. Aqui temos raiz quadrada de 4 menos 4 seno ao quadrado colocando quatro em evidência, raiz de quatro é 2. E agora ficamos com 1 menos seno ao quadrado teta, que é igual ao cosseno ao quadrado teta. Com a raiz fica apenas cosseno teta.

E agora vezes dois cosseno teta. D teta, igual a 4, integral de zero a pi sobre 6, bom vamos escrever estes - todos estes - fatores da seguinte forma. Temos aqui dois, seno de teta, vezes cosseno de teta. E agora outra vez, vezes dois, o outro seno de teta e aqui cosseno teta de teta.

- VI. INTEGRAL em português europeu é de género masculino, em português brasileiro, de género feminino.
- VII. INDIVIDUAL
- VIII. INDIVIDUAL